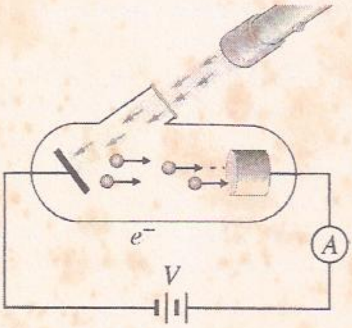
PR-5.09. ***Tiempo de exposición para que ocurra el efecto fotoeléctrico según la teoría clásica***

Una lámpara de mercurio emite luz ultravioleta de longitud de onda $\lambda = 253{,}7$ nm con una potencia $P = 0{,}1$ W, se coloca a una distancia $d = 1$ m de una placa de potasio ($\phi = 2{,}22$ eV). Haga un estimado, desde el punto de vista de la física clásica, del tiempo de exposición de la radiación que se requiere para que un átomo de potasio (radio ≈ 2Å), acumule la suficiente energía para que un electrón pueda escapar del metal.



Solución: Suponiendo que la lámpara de mercurio irradia la energía uniformemente en todas direcciones, la intensidad de la radiación a una distancia de un metro es:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{0{,}1\text{W}}{4\pi(1\text{m})^2} = 7{,}96\text{x}10^{-3}\text{W/m}^2$$

El átomo presenta un área $A = \pi r^2$, y la potencia que incide sobre éste es:

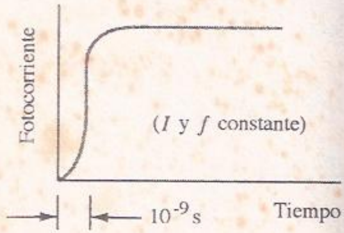
$$P = I\pi r^2 = (7{,}96\text{x}10^{-3}\text{W/m}^2)\pi(2\text{x}10^{-10}\text{m})^2 = 1{,}0\text{x}10^{-21}\text{W}$$

La energía requerida para arrancarle un electrón es:

$$\phi = (2{,}22\text{eV})(1{,}6\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}) = 3{,}55\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

Por lo tanto, para acumular suficiente energía para emitir un electrón, el tiempo de exposición requerido debe ser:

$$t = \frac{\phi}{P} = \frac{3{,}55\text{x}10^{-19}\,\text{J}}{1{,}0\text{x}10^{-21}\,\text{J}/s} = 355 \text{ segundos!}$$



Es decir, desde el punto de vista de la física clásica, los electrones requerirían cerca de seis minutos para absorber la radiación incidente antes de adquirir la suficiente energía cinética para poder escapar. Esto significa que, clásicamente resulta imposible explicar la observación de la casi ausencia de retraso de tiempo entre el momento en que se activa la luz y la aparición de los fotoelectrones (menos de un nanosegundo). La explicación es que, basta que la energía del fotón sea suficiente, la corriente se produce al instante porque un fotón da toda su energía a un solo electrón (interacción uno a uno fotón- electrón)

Respuesta:

$$\boxed{t = 355\text{s} = 5{,}92\text{min}}$$

PR-5.10. *Efecto fotoeléctrico para dos distintas λ*

El potencial de frenado para los fotoelectrones emitidos por una superficie metálica iluminada con luz de longitud de onda λ_1 = 500nm es V_1 = 0,7 V. Cuando se cambia la longitud de onda se encuentra que el nuevo potencial de frenado es V_2 =1,4 V.

a) ¿Cuál es la nueva longitud de onda?

b) ¿Cuál es la función de trabajo para este metal?

Solución: El potencial de frenado V_0 se relaciona con la energía cinética máxima de los electrones liberados: $eV_0 = K_m$ y de acuerdo con la ecuación de Einstein, se tiene:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \phi + K_m = \phi + eV_0$$

Donde ϕ es la función de trabajo o la energía mínima con la cual un electrón está ligado en el metal. Para las dos longitudes de onda respectivas, se tiene:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = \phi + eV_1 \qquad \frac{hc}{\lambda_2} = \phi + eV_2$$

Despejando ϕ de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, se obtiene:

$$\frac{hc}{\lambda_2} = \phi + eV_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - eV_1 + eV_2$$

Despejando, encontramos la expresión para λ_2:

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda_1} - eV_1 + eV_2} = \frac{hc\lambda_1}{hc + (eV_2 - eV_1)\lambda_1}$$

El valor numérico de *hc* es:

$$hc = \frac{1{,}99\text{x}10^{-25}\,\text{J.m}}{(1{,}602\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV})(10^{-9}\,\text{m/nm})} = 1240\text{eV.nm}$$

y la longitud de onda buscada es:

$$\lambda_2 = \frac{(1240\text{eV.nm})(500\text{nm})}{1240\text{eV.nm} + (1{,}4\text{eV} - 0{,}70\text{eV})500\text{nm}} = 390\text{nm}$$

b) El valor de la función de trabajo es:

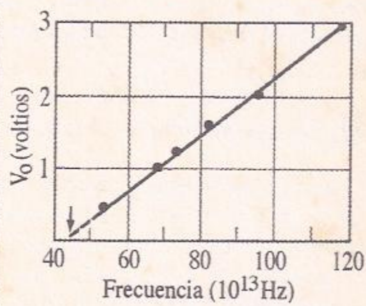
$$\phi = \frac{hc}{\lambda_1} - eV_1 = \frac{1240\text{eV.nm}}{500\text{nm}} - 0{,}7\text{eV} = 1{,}78\text{eV}$$

Respuesta:

a) $\lambda_2 = 390\text{nm}$
b) $\phi = 1{,}78\text{eV}$

PR-5.11. *La data que corroboró la teoría de Einstein*

La gráfica muestra la variación del potencial critico de frenado V_0, en función de la frecuencia *f* de los fotones incidentes en un experimento de efecto fotoeléctrico, para un cierto metal. A partir de esta data haga un estimado de:
a) La frecuencia de corte de los fotones.
b) La constante de Planck, suponiendo que *e* es conocida.
c) La función de trabajo del metal.



R. Millikan, *Phys. Rev.* 7, 362, 1916

Solución: a) Los puntos experimentales caen sobre una línea recta, lo que significa que podemos analizar la data mediante la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, si representamos el voltaje V_0 en función de *f*:

$$hf = \phi + eV_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{h}{e} f + \frac{\phi}{e}$$

La intersección de la recta extrapolada con el eje horizontal representa la frecuencia de corte, la cual arroja un valor:

$$f_0 = 4{,}39\text{x}10^{14}\,\text{Hz}.$$

b) La pendiente de la recta es *h/e*, independiente de la sustancia emisora y tiene un valor aproximado:

$$\text{Pendiente: } \frac{h}{e} = \frac{(3{,}0-0)\text{voltios}}{(118-44)10^{13}\text{s}^{-1}} = 4{,}05\text{x}10^{-15}\text{V.s}$$

El valor estimado de la constante de Planck es:

$$h = (4{,}05\text{x}10^{-15}\text{V.s})(1{,}60\text{x}10^{-19}\text{C}) \approx 6{,}48\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}$$

Este es muy cercano al valor aceptado: $h = 6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}$

c) La función de trabajo del material se relaciona con la frecuencia de corte:

$$\phi = hf_0 = (6{,}48\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(4{,}39\text{x}10^{14}\,\text{s}^{-1}) = 2{,}84\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

$$\phi = \frac{2{,}84\text{x}10^{-19}\,\text{J}}{1{,}60\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}} = \phi = 1{,}78\text{eV}$$

* Al comienzo Millikan se negaba a aceptar la teoría de los fotones de Einstein. Sin embargo, sus mediciones verificaban por primera vez y en forma contundente, la predicción de Einstein, razón por la cual se hizo merecedor del premio Nobel de física en 1923, dos años después que lo recibiera Einstein.

Respuesta:

a) $f_0 = 4{,}39\text{x}10^{14}\,\text{Hz}$
b) $h \approx 6{,}48\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}$
c) $\phi = 1{,}78\text{eV}$

PR-5.12. *Los fotoelectrones que son mas energéticos*

Considere una placa metálica de sodio ($\phi = 2{,}46$ eV).
a) ¿Cuál sería el potencial crítico de frenado correspondiente a la luz longitud de onda $\lambda = 400$ nm?
b) ¿Cuál sería la velocidad máxima de los electrones emitidos de la superficie del metal?
c) Halle la longitud de onda de corte para el sodio.

Solución: La energía de un fotón incidente es:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^{8}\text{m/s})}{(400\text{x}10^{-9}\text{m})} = 4{,}97\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

$$E = \frac{4{,}97\text{x}10^{-19}\,\text{J}}{1{,}60\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}} = 3{,}11\text{eV}$$

Aplicando la ecuación para el efecto fotoeléctrico, el potencial de frenado V_0 viene dado por:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \phi + eV_0 \quad \Rightarrow \quad eV_0 = E - \phi$$

$$eV_0 = 3{,}11\text{eV} - 2{,}46\text{eV} = 0{,}65\text{eV} \quad \Rightarrow \quad V_0 = 0{,}65\text{V}$$

b) La energía cinética máxima de los electrones emitidos de la superficie del metal es:

$$K_{max} = eV_0 = (0{,}65\text{eV})(1{,}60\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}) = 1{,}04\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

Por lo tanto, la velocidad máxima es:

$$\frac{1}{2}mv^2 = K_{max} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2K_{max}}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(1{,}04\text{x}10^{-19}\,\text{J})}{(9{,}11\text{x}10^{-31}\text{kg})}} = 4{,}78\text{x}10^5\text{m/s}$$

c) La función de trabajo, en Joules, para el sodio es:

$$\phi = 2{,}46\text{eV} = (2{,}46\text{eV})(1{,}60\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}) = 3{,}94\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

La longitud de onda de corte para el Na corresponde a la situación en que la K_{max} de los electrones es nula:

$$\frac{hc}{\lambda} = \phi + K_{max} = \phi \quad \Rightarrow \quad \lambda_c = \frac{hc}{\phi}$$

$$\lambda_c = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^8\text{m/s})}{3{,}94\text{x}10^{-19}\,\text{J}} = 5{,}05\text{x}10^{-7}\text{m} = 505\text{nm}$$

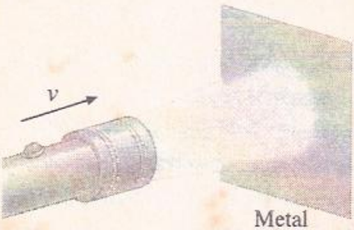
Para $\lambda_c > 505\text{nm}$, no hay emisión de fotoelectrones.

Respuesta:

a) $V_0 = 0{,}65\text{V}$
b) $v = 4{,}78\text{x}10^5\text{m/s}$
c) $\lambda_c = 505\text{nm}$

PR-5.13. *Efecto Doppler para tener efecto fotoeléctrico*

Cuando se usa una fuente luminosa de frecuencia f_0 = $6\text{x}10^{14}$ Hz, no se consigue arrancar fotoelectrones de cierto metal. Si se le da a la fuente una velocidad v hacia el metal, se obtiene efecto fotoeléctrico cuando $v = 0{,}30c$.
a) ¿Cuál es la función de trabajo del metal?
b) Si la velocidad de la fuente se incrementa a $v = 0.90c$, halle la máxima energía cinética de los fotoelectrones.



Solución: a) Cuando la fuente se mueve hacia el metal, el efecto Doppler provoca un incremento en la frecuencia de las ondas que llegan al metal. El valor de la frecuencia es:

$$f_1 = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f_0\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = f_0\sqrt{\frac{1+0,3}{1-0,3}} = 1,36\, f_0$$

$$f_1 = 1,36(6,0\text{x}10^{14}\,\text{Hz}) = 8,18\text{x}10^{14}\,\text{Hz}$$

Esta frecuencia de corte, nos permite calcular la función de trabajo del metal:

$$\phi = hf_1 = (6,63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(8,18\text{x}10^{14}\,\text{s}^{-1}) = 5,42\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

$$\phi = 5,42\text{x}10^{-19}\,\text{J}/1,6\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}) = 3,39\text{eV}$$

b) La nueva frecuencia de la luz incidente es:

$$f_2 = f_0\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = f_0\sqrt{\frac{1+0,9}{1-0,9}} = 4,36\, f_0 = 2,62\text{x}10^{15}\text{Hz}$$

$$hf_2 = \frac{(6,63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(2,62\text{x}10^{15}\text{s}^{-1}}{1,6\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}} = 10,9\ \text{eV}$$

La energía cinética máxima de los fotoelectrones es:

$$K_{max} = hf_2 - \phi = 10,9\ \text{eV} - 3,39\text{eV} = 7,51\text{eV}$$

Respuesta:

a) $\phi = 3,39\text{eV}$
b) $K_{max} = 7,51\text{eV}$

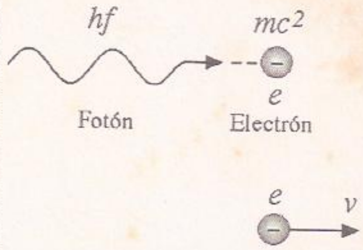
PR-5.14. *Es imposible para los electrones libres.*

El efecto fotoeléctrico puede ocurrir solamente con aquellos electrones que están ligados (en átomos). Demuestre que resulta imposible que un fotón sea absorbido por un electrón libre aislado y por lo tanto no puede ocurrir efecto fotoeléctrico.

Solución: Supongamos que se ignora la conservación de la carga y suponemos que, en la colisión el fotón cede toda su energía hf al electrón estacionario y luego desaparece, mientras que el electrón sale con velocidad v. Aplicando la conservación del momentum y de la energía total al sistema electrón-fotón, respectivamente:

Momentum: $$\frac{hf}{c}+0=0+\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (1)$$

Energía: $$hf+mc^2=0+\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (2)$$



Si dividimos por c la ecuación (2), se obtiene:

$$\frac{hf}{c}=\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-mc=mc\left[\frac{1-\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

Para que la ecuación (1) se cumpla, se requiere que:

$$mc\left[\frac{1-\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$v=c\left[1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right]$$

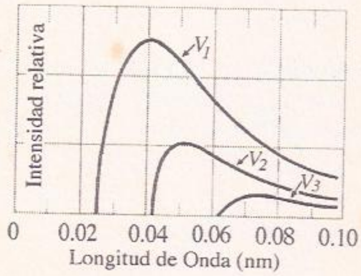
Llegamos así a una ecuación que tiene dos soluciones: $v = 0$ o $v = c$. La solución $v = 0$ implica, según la ecuación (1), que $hf/c=0$ (lo que se interpreta como que no había ningún fotón incidente). Por otra parte, la solución $v = c$ está descartada, ya que supondría que el electrón queda con energía y momentum infinito después de la colisión y que el fotón tiene momentum y energía infinita.

Respuesta:

Imposible porque no se cumpliría la conservación de la energía y del momentum.

PR-5.15. *Los electrones al frenarse producen rayos X*

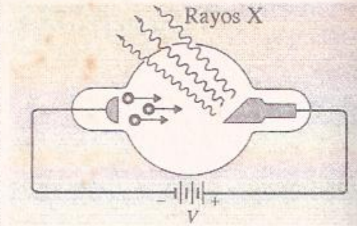
En un generador de rayos X, los electrones emitidos por un cátodo caliente son acelerados hacia un ánodo. Cuando impactan el ánodo, debido al frenado sufrido por los electrones se produce la emisión de fotones de muy corta longitud de onda (Proceso bremsstrahlung). En la gráfica se muestran las curvas de intensidad relativa de la radiación en función de la longitud de onda, para tres diferentes voltajes aceleradores (no están mostrados los picos que se superponen al espectro continuo). Determine cuáles son estos voltajes.

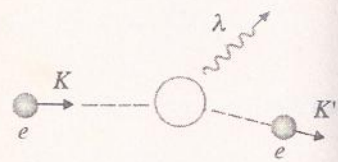


Solución: Cuando un electrón de carga $-e$ es acelerado a través de una diferencia de potencial V, adquiere una energía cinética, $K = eV$. La energía cinética del electrón se invierte en producir fotones.

El fotón mas energético es aquel de mayor frecuencia (menor longitud de onda), y es producido cuando toda la energía cinética del electrón es convertida justamente en la de un solo fotón, quedando en reposo ($K' = 0$).

$$E = hf_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = eV \quad \Rightarrow \quad \lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$





En el espectro continuo suministrado podemos identificar la mínima longitud de onda correspondiente a cada uno los tres voltajes aceleradores, obteniéndose: $\lambda_1 = 0{,}025$ nm, $\lambda_2 = 0{,}042$ nm, $\lambda_3 = 0{,}062$ nm. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, encontramos los voltajes aceleradores correspondientes:

$$V_1 = \frac{hc}{e\lambda_1} = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^8\,\text{m/s})}{(1{,}60\text{x}10^{-19}\,\text{C})(2{,}5\text{x}10^{-11}\,\text{m})} = 49{,}8\ \text{kV}$$

$$V_2 = \frac{hc}{e\lambda_2} = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^8\,\text{m/s})}{(1{,}60\text{x}10^{-19}\,\text{C})(4{,}2\text{x}10^{-11}\,\text{m})} = 29{,}6\ \text{kV}$$

$$V_3 = \frac{hc}{e\lambda_3} = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^8\,\text{m/s})}{(1{,}60\text{x}10^{-19}\,\text{C})(6{,}2\text{x}10^{-11}\,\text{m})} = 20{,}0\ \text{kV}$$

Respuesta:

$V_1 = 49{,}8$ kV
$V_2 = 29{,}6$ kV
$V_3 = 20{,}0$ kV

PR-5.16. *Rayos X emitidos por electrones relativistas*

Si la velocidad de los electrones que inciden sobre un blanco metálico es $v = 0{,}90c$, cuál será la longitud de onda de corte del espectro continuo de los rayos X emitidos?

Solución: La longitud de onda mas corta es producida cuando toda la energía cinética del electrón es convertida justamente en la producción del fotón: $K = hf = hc/\lambda_{min}$. Puesto que la velocidad del electrón es del orden de la velocidad de la luz, debemos usar la expresión de la energía total relativista:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m_0 c^2 + K$$

La energía cinética es:

$$K = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$$

$$\frac{hc}{\lambda_{min}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{m_0c^2}\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\lambda_{min} = \frac{6,63\text{x}10^{-34}}{9,11\text{x}10^{-31}(3\text{x}10^8)}\left(\frac{\sqrt{1-0,9^2}}{1-\sqrt{1-0,9^2}}\right) = 1,87\text{x}10^{-12}\text{m}$$

Respuesta:

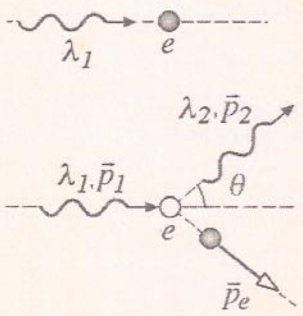
$$\boxed{\lambda_{min} = 1,87\text{x}10^{-12}\text{m}}$$

PR-5.17. *Deducción de la fórmula de Compton*

En el efecto Compton, un fotón de longitud de onda λ_1 choca con un electrón de masa en reposo m, este último absorbe energía y en el proceso el fotón dispersado queda con menor energía, y por lo tanto, mayor longitud de onda λ_2. Determine la variación $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, a partir de la conservación de la energía y del momentum.

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

Solución: El fotón incidente tiene un momentum $p_1 = h/\lambda_1$ y una energía $E_1 = p_1c$, mientras que el fotón dispersado tiene un momentum $p_2 = h/\lambda_2$ y una energía $E_2 = p_2c$. Inicialmente el electrón estaba en reposo con energía mc^2 y momentum cero, finalmente, tendrá momentum $\bar{p}_e$ y energía dada por:



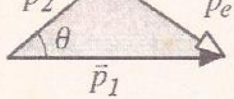
$$E^2 = (mc^2)^2 + (p_ec)^2$$

Por conservación de la energía total del sistema:

$$p_1c + mc^2 = p_2c + E$$

$$(p_1c + mc^2 - p_2c)^2 = E^2 = (mc^2)^2 + (p_ec)^2 \qquad (1)$$

Por conservación del momentum total del sistema:



$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_e \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_e = \bar{p}_1 - \bar{p}_2$$

Efectuando el producto escalar:

$$p_e^2 = \bar{p}_e \bullet \bar{p}_e = (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\bullet(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$$

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta \qquad (2)$$

Sustituyendo p_e^2 en la ecuación 1 y simplificando:

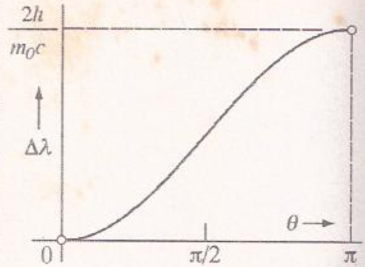
$$[(p_1 - p_2)^2 + 2(p_1 - p_2)mc] = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos\theta$$

$$(p_1 - p_2)mc = p_1 p_2 (1 - \cos\theta)$$

Sustituyendo $p_1 = h/\lambda_1$ y $p_2 = h/\lambda_2$ en esta ecuación:

$$(\frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2})mc = \frac{h}{\lambda_1}\frac{h}{\lambda_2}(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$



Respuesta:

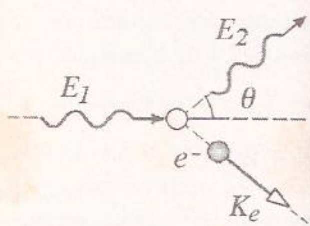
$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)}$$

PR-5.18. *La energía cinética del electrón que rebota*

a) En una dispersión Compton a un ángulo θ, demuestre la siguiente relación entre la energía cinética, K_e, del electrón que rebota y la energía E_1 del fotón incidente:

$$\frac{K_e}{E_1} = \frac{(2E_1/mc^2)sen^2\theta/2}{1 + (2E_1/mc^2)sen^2\theta/2}$$

b) Un método para hallar la longitud de onda de los rayos X incidentes consiste en medir la máxima energía cinética de los electrones que rebotan. Si K_e(max) es 0,425 MeV, cuál es la longitud de onda de los rayos X.



Solución: a) Si en la expresión de Compton, sustituimos las longitudes de onda en términos de las energías respectivas de los fotones, $\lambda_1 = hc/E_1$ y $\lambda_2 = hc/E_2$, se obtiene:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{hc}{E_2} - \frac{hc}{E_1} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = \frac{(1 - \cos\theta)}{mc^2}$$

$$E_2 = [\frac{1}{E_1} + \frac{(1 - \cos\theta)}{mc^2}]^{-1} = [\frac{E_1 mc^2}{mc^2 + E_1(1 - \cos\theta)}]$$

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + (E_1/mc^2)(1 - \cos\theta)}$$

La energía cinética del electrón es la diferencia entre las energías de los fotones inicial y final:

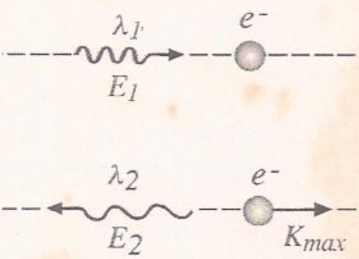
$$K_e = E_1 - E_2 = E_1 - \frac{E_1}{1+(E_1/mc^2)(1-\cos\theta)}$$

$$K_e = \frac{E_1(E_1/mc^2)(1-\cos\theta)}{1+(E_1/mc^2)(1-\cos\theta)}$$

Tomando en cuenta la relación: $(1-\cos\theta) = 2sen^2\theta/2$, podemos escribir finalmente:

$$\frac{K_e}{E_1} = \frac{(E_1/mc^2)(1-\cos\theta)}{1+(E_1/mc^2)(1-\cos\theta)} = \frac{(2E_1/mc^2)sen^2\theta/2}{1+(2E_1/mc^2)sen^2\theta/2}$$

b) La energía cinética del electrón será máxima cuando la colisión es frontal, en cuyo caso el electrón sale hacia adelante y el nuevo fotón sale hacia atrás ($\theta = 180°$). En este caso la expresión anterior queda:



$$\frac{K_{max}}{E_1} = \frac{2E_1/mc^2}{1+2E_1/mc^2} \quad \Rightarrow \quad K_{max} = \frac{2E_1^2/mc^2}{1+2E_1/mc^2}$$

Se obtiene así una ecuación cuadrática en E_1:

$$E_1^2 - E_1 K_{max} - \frac{mc^2 K_{max}}{2} = 0$$

Recordemos que la energía en reposo del electrón es:

$$mc^2 = (9{,}1\text{x}10^{-31}\text{kg})(3\text{x}10^8\text{m/s})^2 = 8{,}19\text{x}10^{-14}\text{J}$$

$$mc^2 = (8{,}19\text{x}10^{-14}\text{J})/(1{,}60\text{x}10^{-19}\text{eV/J}) = 0{,}51\text{MeV}$$

Reemplazando los valores numéricos, la ecuación cuadrática queda:

$$E_1^2 - E_1(0{,}425) - 0{,}108 = 0$$

La solución positiva para la energía del fotón es:

$$E_1 = \frac{0{,}425 + \sqrt{0{,}425^2 + 0{,}4335}}{2} = 0{,}604\text{MeV}$$

La longitud de onda del fotón incidente es:

$$\lambda_1 = \frac{hc}{E_1} = \frac{6{,}63\text{x}10^{-34}\text{J.s})(3\text{x}10^8\text{m/s})}{6{,}04\text{x}10^5\text{eV}(1{,}6\text{x}10^{-19}\text{J/eV})} = 2{,}06\text{x}10^{-12}\text{m}$$

Respuesta:

$$\boxed{\frac{K_e}{E_1} = \frac{(2E_1/mc^2)sen^2\theta/2}{1+(2E_1/mc^2)sen^2\theta/2}}$$

b) $\lambda_1 = 2{,}06\text{x}10^{-12}\text{m}$

PR-5.19. *Colisión frontal fotón - electrón*

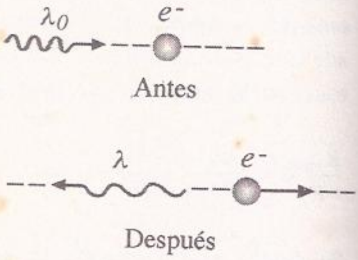
Un fotón colisiona con un electrón libre y cede la mitad de su energía al electrón. El electrón sale hacia adelante en el mismo sentido del fotón incidente.

a) Halle la longitud de onda del fotón incidente.

b) Halle la velocidad adquirida por el electrón.

Solución: a) Debido a que el fotón inicial cede la mitad de su energía al electrón, el fotón final queda con la otra mitad de la energía $E = E_0 / 2$:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{hc}{\lambda_0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2\lambda_0$$



La longitud de onda se obtiene aplicando la expresión conocida para el corrimiento Compton:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$2\lambda_0 - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos 180°) = \frac{h}{mc}(1 - (-1)) = 2\frac{h}{mc}$$

$$\lambda_0 = \frac{2h}{mc} = \frac{2(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})}{(9{,}11\text{x}10^{-31}\text{kg})(3\text{x}10^{8}\text{m/s})} = 4{,}85\text{x}10^{-12}\text{m}$$

b) La energía del fotón incidente es:

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^{8}\,\text{m/s})}{4{,}85\text{x}10^{-12}\text{m}} = 4{,}10\text{x}10^{-14}\,\text{J}$$

La energía cinética del electrón es la mitad de este valor:

$$K_e = \frac{1}{2}E_0 = \frac{1}{2}(4{,}10\text{x}10^{-14}\,\text{J}) = 2{,}05\text{x}10^{-14}\,\text{J}$$

Usando la expresión relativista de la energía del electrón:

$$mc^2 = K_e + m_0c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = K_e + m_0c^2$$

$$(\frac{v}{c})^2 = 1 - (\frac{m_0c^2}{K_e + m_0c^2})^2$$

Como el valor de la energía en reposo es:

$$m_0c^2 = (9{,}1\text{x}10^{-31}\text{kg})(3\text{x}10^8\text{m/s})^2 = 8{,}19\text{x}10^{-14}\text{ J}$$

Encontramos:

$$(\frac{v}{c})^2 = 1 - (\frac{8{,}19\text{x}10^{-14}\text{ J}}{2{,}05\text{x}10^{-14}\text{ J} + 8{,}19\text{x}10^{-14}\text{ J}})^2 = 0{,}36$$

Por lo tanto, la velocidad con la que sale el electrón en la dirección del fotón original es: $v = 0{,}6c$.

Respuesta:

a) $\lambda_0 = 4{,}85\text{x}10^{-12}\text{m}$
b) $v = 0{,}6c$

PR-5.20. *Dispersión simétrica del fotón y el electrón*

Un fotón de rayos γ de energía $E_1 = 2mc^2$ es dispersado por un electrón libre e inicialmente en reposo, de manera tal que el ángulo de dispersión del electrón es igual al del fotón dispersado $(\theta = \phi)$. Determine:

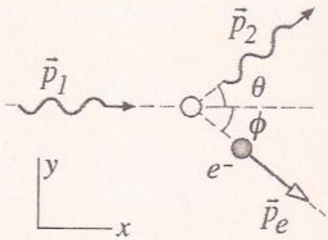
a) Los ángulos de dispersión del fotón y del electrón.

b) La energía del fotón dispersado y la energía cinética del electrón.

Solución: Aplicando la conservación del momentum en las direcciones x e y, respectivamente, y tomando en cuenta que $\theta = \phi$, se tiene:

$$\sum p_x: \quad p_1 = p_2 \cos\theta + p_e \cos\phi = (p_2 + p_e)\cos\theta \qquad (1)$$

$$\sum p_y: \quad 0 = p_2 sen\theta - p_e sen\phi \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_e \qquad (2)$$



Combinando estas dos ecuaciones:

$$p_1 = 2p_2 \cos\theta \qquad \frac{h}{\lambda_1} = 2\frac{h}{\lambda_2}\cos\theta \qquad \lambda_2 = 2\lambda_1 \cos\theta$$

Usando la fórmula de Compton: $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$

$$2\cos\theta - 1 = \frac{hc}{\lambda_1 mc^2}(1 - \cos\theta) = \frac{E_1}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

Como $E_1 = 2mc^2$, se tiene:

$$2\cos\theta - 1 = \frac{2mc^2}{mc^2}(1 - \cos\theta) = 2(1 - \cos\theta)$$

Despejando, encontramos el ángulo de dispersión θ:

$$4\cos\theta = 3 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 3/4 \qquad \theta = \phi = 41{,}4°$$

b) La energía del fotón dispersado es:

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{2\lambda_1 \cos\theta} = \frac{E_1}{2\cos\theta} = \frac{2mc^2}{2(3/4)} = \frac{4}{3}mc^2$$

y la energía cinética del electrón:

$$K_e = E_1 - E_2 = 2mc^2 - \frac{4}{3}mc^2 = \frac{2}{3}mc^2$$

Respuesta:

a) $\theta = \phi = 41{,}4°$
b) $E_2 = 4mc^2/3$
$K_e = 2mc^2/3$

PR-5.21. *Una dispersión Compton a ángulo recto*

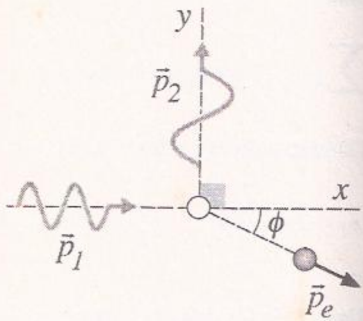
Un fotón de longitud de onda $\lambda_1 = 0{,}125$ nm que viaja en dirección $+x$ incide sobre un electrón libre en reposo. El fotón es dispersado en ángulo recto. Para el electrón que rebota, determine:

a) la energía cinética.
b) el momentum
c) el ángulo de dispersión.

Solución: a) El corrimiento Compton es:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\Delta\lambda = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(1-\cos 90°)}{(9{,}11\text{x}10^{-31}\text{kg})(3\text{x}10^{8}\text{m/s})} = 2{,}4\text{x}10^{-12}\text{m}$$



Por lo tanto, la longitud de onda del fotón dispersado es:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 12{,}5\text{x}10^{-12}\text{m} + 2{,}4\text{x}10^{-12}\text{m} = 1{,}5\text{x}10^{-11}\text{m}$$

La energía cinética del electrón es:

$$K_e = E_1 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$K_e = \frac{6{,}6\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}(3\text{x}10^{8}\text{m/s})2{,}4\text{x}10^{-12}\text{m}}{(12{,}5\text{x}10^{-12}\text{m})(1{,}5\text{x}10^{-11}\text{m})} = 2{,}55\text{x}10^{-15}\text{J}$$

?

b) Las componentes x e y del momentum del electrón son:

$$p_x = p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{6,63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}}{12,5\text{x}10^{-12}\text{m}} = 5,30\text{x}10^{-23}\text{kg.m.s}^{-1}$$

$$p_y = p_2 = \frac{h}{\lambda_2} = \frac{6,63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}}{1,5\text{x}10^{-11}\text{m}} = 4,42\text{x}10^{-23}\text{kg.m.s}^{-1}$$

$$p_e = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 6,9\text{x}10^{-23}\text{kg.m.s}^{-1}$$

c) El ángulo de rebote del electrón:

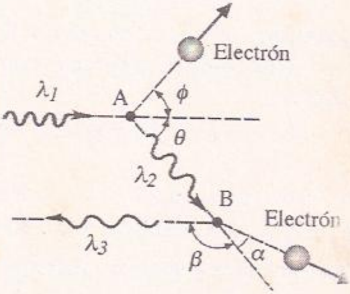
$$tg\phi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{4,42\text{x}10^{-23}\text{kg.m.s}^{-1}}{5,30\text{x}10^{-23}\text{kg.m.s}^{-1}} = 0,833 \quad \Rightarrow \quad \phi = 39,8^\circ$$

Respuesta:

a) $K_e = 2,55\text{x}10^{-15}\text{J}$
b) $p_e = 6,9\text{x}10^{-23}\text{kg.m.s}^{-1}$
c) $\phi = 39,8^\circ$

PR-5.22. *Dos dispersiones Compton sucesivas.*

Un fotón que tiene una longitud de onda λ_1 colisiona con un electrón libre en la posición A, produciendo un segundo fotón de longitud de onda λ_2. A su vez, este fotón colisiona con otro electrón libre en la posición B produciendo un tercer fotón con longitud de onda λ_3, el cual se mueve en dirección directamente opuesta al fotón original. Halle el corrimiento de la longitud de onda: $\Delta\lambda = \lambda_3 - \lambda_1$



Solución: Aplicando la expresión para el efecto Compton en la primera dispersión:

$$\Delta\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

Similarmente, para la segunda dispersión:

$$\Delta\lambda_{23} = \lambda_3 - \lambda_2 = \frac{h}{mc}(1-\cos\beta) = \frac{h}{mc}(1-\cos(\pi-\theta))$$

Sumando estas dos ecuaciones:

$$\lambda_3 - \lambda_1 = \Delta\lambda_{12} + \Delta\lambda_{23} = \frac{h}{mc}[(1-\cos(\pi-\theta)) + (1-\cos\theta)]$$

Tomando en cuenta que: $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$, se tiene el corrimiento:

$$\Delta\lambda = \lambda_3 - \lambda_1 = 2\frac{h}{mc}$$

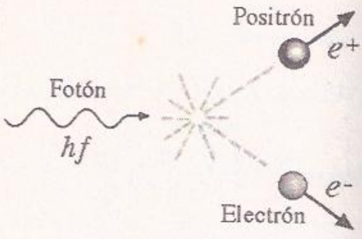
$$\lambda_3 - \lambda_1 = \frac{2x6{,}63x10^{-34}\,\text{J.s}}{(9{,}11x10^{-31}\text{kg})(3x10^8\text{m/s})} = 4{,}9x10^{-12}\text{m}$$

Respuesta:

$$\boxed{\lambda_3 - \lambda_1 = 2\frac{h}{mc} = 0{,}0049\text{nm}}$$

PR-5.23. *Imposible la producción de pares en el vacío*

En el proceso de producción de pares, un fotón desaparece y se produce un electrón y un positrón.
b) Demuestre que si se cumple la conservación de la energía entonces no se cumple la conservación del momentum. Esto quiere decir que el proceso de producción de pares puede ocurrir solamente en presencia de otra partícula que pueda absorber parte del momentum.



Solución: a) El momentum de cada partícula está relacionado con su respectiva energía por la expresión relativista:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

El fotón tiene masa en reposo nula, por lo tanto: $E_f = |\vec{p}_f|c$. El electrón y el positrón tienen masa en reposo no nula y sus energías respectivas son:

$$E_{e+} > |\vec{p}_{e+}|c \qquad\qquad E_{e-} > |\vec{p}_{e-}|c$$

Supongamos que la energía se conserva en el proceso de producción del par electrón - positrón:

$$E_f = E_{e+} + E_{e-} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{p}_f| > |\vec{p}_{e+}| + |\vec{p}_{e-}|$$

Por otra parte, los módulos de los vectores momentum $\vec{p}_{e+}$ y $\vec{p}_{e-}$ deben cumplir la desigualdad triangular:

$$|\vec{p}_{e+}| + |\vec{p}_{e-}| \geq |\vec{p}_{e+} + \vec{p}_{e-}|$$

Por lo tanto: $\quad |\vec{p}_f| > |\vec{p}_{e+} + \vec{p}_{e-}|$

Esto significa que no se cumple la conservación del momentum. Es decir, la producción de pares no puede ocurrir en el espacio vacío porque la energía y el momentum no podrían conservarse de forma simultánea. Por ello, es necesaria la presencia de un objeto masivo adicional que se lleve parte del momentum.

b) En el proceso la energía tomada del objeto masivo es insignificante para producir el par positrón-electrón, la energía del fotón es:

$$hf = (m_0c^2 + K_-) + (m_0c^2 + K_+)$$

Concluimos que el fotón debe tener al menos una energía $E = 2m_0c^2 = 1{,}022\text{MeV}$ (el doble que la de un electrón en reposo).

Respuesta:

a) Si se cumple:
$$E_f = E_{e+} + E_{e-}$$
Entonces: $\vec{p}_{e+} + \vec{p}_{e-} \neq \vec{p}_f$

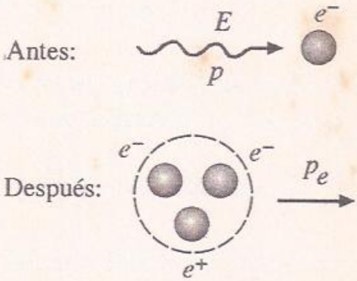
b) Mínimo: $E = 2m_0c^2$

PR-5.24. *Creación de pares en colision fotón-electrón*

Un fotón de energía E colisiona con un electrón en reposo y se produce un par positrón– electrón. Suponga que los dos electrones y el positrón salen moviéndose con igual momentum en la dirección del fotón incidente. Determine la energía cinética final de las tres partículas.

Fotón $+ e^- \rightarrow e^+ + e^- + e^-$

Solución: El dibujo ilustra la situación antes y después de la colisión. Sea p y E el momentum y energía del fotón antes de la colisión y p_e y E_e el momentum y energía de cada partícula después de la colisión:



Conservación del momentum: $E/c = 3p_e$

Conservación de la energía:

$$E + m_ec^2 = 3E_e = 3\sqrt{(p_ec)^2 + (m_ec^2)^2}$$

$$E^2 + 2m_ec^2E + (m_ec^2)^2 = 9(p_ec)^2 + 9(m_ec^2)^2$$

Combinando con la ecuación del momentum:

$$2m_ec^2E + (m_ec^2)^2 = 9(m_ec^2)^2 \quad \Rightarrow \quad E = 4m_ec^2$$

Luego, la energía inicial es: $\quad E + m_ec^2 = 5m_ec^2$

La energía final es: $\quad 3(m_ec^2 + K_e)$

Igualando las energías inicial y final, encontramos la energía cinética final de cada una de las tres partículas:

$$5m_ec^2 = 3(m_ec^2 + K_e) \quad \Rightarrow \quad K_e = \frac{2}{3}m_ec^2$$

Respuesta:

$$\boxed{K_e = \frac{2}{3}m_ec^2}$$